Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{|x^2 - 4|}$ b) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = x^2 - 1$ y resuelve la ecuación $f(g(x)) = g(f(x))$.

3. Calcula la función inversa de $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$. ¿Coincide el dominio de f con el de f^{-1}?

4. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla el dominio y el recorrido.

b) Halla su función inversa, su dominio y su recorrido.

5. El recibo de una compañía eléctrica consta de varios apartados: por la potencia contratada se factura mensualmente la cantidad de 2 euros y cada kW/h de energía cuesta 0,10 euros, siempre que el consumo no supere los 500 kW/h. A partir de los 500 kW/h, la empresa factura a razón de 0,05 euros por kW/h. Escribe la expresión que indica el precio a pagar, en función de los k/Wh consumidos.

6. Una determinada cooperativa ha calculado que su cosecha anual de manzanas es de 100 000 kg, que piensa vender a razón de 0,50 euros/kg. Cada semana que transcurre se estropean 2 000 kg de manzanas, y para compensar la pérdida, los miembros de la cooperativa aumentan 0,10 euros el precio del kilogramo por cada semana que pasa.

Escribe la función que determina el valor de las manzanas, dependiendo de las semanas transcurridas.

7. Una editorial lanza al mercado una novela, vendiendo cada ejemplar al precio de 14 euros. Los costes de producción por unidad son de 8 euros y los costes de funcionamiento de la empresa son de 6 000 euros mensuales.

a) ¿Cuántos ejemplares debe vender para amortizar los costes totales de la empresa por un período de dos meses?

b) ¿Cuánto gana o pierde si en 2 meses produce 5 000 ejemplares de la novela y agota la producción?

c) ¿Cuánto gana o pierde si en 2 meses produce 8 000 ejemplares de la novela pero sólo vende 4 000 ejemplares?

8. Una clase de vino, *A*, tiene un 8% de alcohol y otra, *B*, tiene un 12%. Indica el grado de alcohol del resultado de mezclar ambos vinos, en función de la cantidad del vino de la clase *A* por litro que se utilice en la mezcla.

9. Juan y su novia, Ana, viven en pueblos diferentes. La distancia entre ambos pueblos es de 20 km. A las 4 de la tarde, Juan sale en bicicleta hacia el pueblo de Ana a una velocidad de 12 km/h. Una hora más tarde, Ana sale a pie al encuentro de Juan, a una velocidad de 4 km/h.

a) Indica la distancia que hay entre ellos en función del tiempo transcurrido desde que Juan inició su camino.

b) ¿En qué momento y a qué distancia del pueblo de Juan se encontrarán?

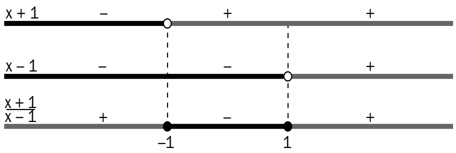
10. Se quiere construir un depósito de base cuadrada con una capacidad de 6 m^3. Escribe la función que determina la altura del depósito dependiendo de la longitud del lado de la base.

SOLUCIONES

1. a) f_1 tiene sentido si $\left|x^2-4\right| \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \neq \pm 2$, por tanto:

$D(f_1) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

b) f_2 tiene sentido si $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$



Por tanto: $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

---

2. $\left.\begin{array}{l} f(g(x)) = f(x^2-1) = \sqrt{x^2+1} \\ g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x+1$

$\Rightarrow x^2+1 = x^2+2x+1 \Rightarrow x = 0$

---

3. $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = y \Rightarrow 1-\dfrac{1}{x} = y^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{1-y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Los dominios de las funciones no coinciden, pues
$D(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

y $D(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

Sólo existe f^{-1} en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

---

4. a) $D(f) = \mathbf{R}$ y su recorrido es $[0, \infty)$.

b) En $(-\infty, 0)$ no tiene función inversa, pero restringida al intervalo $[0, \infty)$ se puede definir la inversa de la siguiente forma:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$D(f^{-1}) = [0, \infty)$, y su recorrido también es $[0, \infty)$.

---

5. $f(x) = \begin{cases} 2+0{,}10x & \text{si } x \leq 500 \\ 52+0{,}05(x-500) & \text{si } x > 500 \end{cases}$

---

6. Si transcurren x semanas, el número de manzanas que hay es $100\,000 - 2\,000x$, y el kilo cuesta $0{,}5 + 0{,}1x$ euros, luego el precio total de las manzanas es:

$f(x) = (100\,000 - 2\,000x)(0{,}5 + 0{,}1x)$ euros $=$

$= 50\,000 + 9\,000x - 200x^2$ euros

---

7. Si vende x ejemplares, los ingresos, en euros, son $I(x) = 14x$, y los costes en los dos meses son la suma de los costes de producir los x ejemplares y los costes de funcionamiento, es decir:
$C(x) = 8x + 1\,200$.

a) $I(x) = C(x) \Rightarrow 14x = 8x + 12\,000 \Rightarrow x = 2\,000$ ejemplares.

b) $\left.\begin{array}{l} I(5000) = 70\,000 \\ C(5000) = 52\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow I - C = 28000$

euros de ganancia.

c) $\left.\begin{array}{l} I(4000) = 56\,000 \\ C(8000) = 76\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow C - I = 20\,000$

euros de pérdida.

---

8. $f(x) = \dfrac{8x}{100} + \dfrac{12(1-x)}{100} = \dfrac{12-4x}{100}$.

El grado de alcohol resultante es del $(12 - 4x)$%, siendo x la parte de vino A que hay por litro de mezcla.

---

9. Si t es el tiempo de Juan, $t - 1$ es el tiempo de Ana, expresados en horas. Como $e = v \cdot t$, Juan ha recorrido $12t$ km y Ana $4(t-1)$. Llamando $d(t)$ a la distancia que hay entre ellos, se tiene:

a) $12t + d(t) + 4(t-1) = 20 \Rightarrow d(t) = 24 - 16t$

b) $d(t) = 0 \Rightarrow t = 1{,}5$ h; por tanto, se encuentran a las 5 y media de la tarde.

La distancia en kilómetros es: $12 \cdot 1{,}5 = 18$.

---

10. Llamando x a la longitud de la base y h a la altura del depósito:

$V(x) = x^2 \cdot h = 6 \Rightarrow h(x) = \dfrac{6}{x^2}$